> ¿SABÍAS QUE...?

John Napier
(1550-1617)

John Napier –creador de los logaritmos– llamó al exponente de cada potencia "número artificial". Más tarde cambió de opinión y lo llamó logaritmo, que significa "relación del número".

La nomenclatura moderna de logaritmos fue introducida por Leonhard Euler en 1728, casi un siglo después de que Napier publicara sus primeras tablas logarítmicas.

Definición de logaritmo y restricciones

Se define **logaritmo** como el exponente de una potencia con cierta base, es decir, el número al cual se debe elevar una base dada para obtener un resultado determinado.

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$

En la expresión anterior, **b** es la **base del logaritmo, a** es el **argumento** o antilogaritmo y **c** es el **logaritmo en base b de a.**

Además, si **c** es un número natural, se tiene que:

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a \leftrightarrow b = \sqrt[c]{a}$$

Ejemplos

1. Determina **x,** si $\log_3 81 = x$.

   Por definición:

   $$\log_3 81 = x \leftrightarrow 3^x = 81$$

   Dado que $81 = 3^4$, se tiene que:

   $$3^x = 3^4$$

   Por lo tanto, $x = 4$.

2. Determina **x,** si $\log_2 \frac{1}{8} = x$.

   Por definición:

   $$\log_2 \frac{1}{8} = x \leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8}$$

   Dado que $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, se tiene que:

   $$2^x = 2^{-3}$$

   Por lo tanto, $x = -3$.

3. Determina **x,** si $\log_{0,5} 2 = x$.

   Por definición:

   $$\log_{0,5} 2 = x \leftrightarrow 0,5^x = 2$$

   Se tiene que $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

   Luego:

   $$0,5^x = 2$$
   $$\left(2^{-1}\right)^x = 2$$
   $$2^{-x} = 2^1$$

   Por lo tanto, $x = -1$.

Hace algunos siglos, los logaritmos permitieron simplificar muchos cálculos relativos a la astronomía, donde el uso de grandes números hacía muy difícil realizar operaciones. John Napier (conocido también como Neper) se dio cuenta de que si las operaciones se realizaban con logaritmos en lugar de hacerlas con los números originales, se podía trabajar con números mucho más pequeños.

En vista de ello, en 1614 escribió el libro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio,* en el cual describe la operatoria con ellos. Su uso fue resistido por algunos matemáticos y físicos, hasta que Johannes Kepler los utilizó para calcular y explicar los movimientos planetarios.

Para una definición completa de los logaritmos, se determinarán las **restricciones** respecto de su base y su argumento.

Respecto a su base

Caso 1

Sea $\log_1 5 = x$.

Por definición:

$$\log_1 5 = x \leftrightarrow 1^x = 5$$

Pero se sabe que, para todo número real **x**:

$$1^x = 1$$

Luego, no existe **x** tal que $1^x = 5$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea distinta de 1.

Caso 2

Sea $\log_0 5 = y$.

Por definición:

$$\log_0 5 = y \leftrightarrow 0^y = 5$$

Pero se sabe que, para todo número real $y \neq 0$:

$$0^y = 0$$

Por lo tanto, no existe **y** tal que $0^y = 5$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea distinta de 0.

Caso 3

Sea $\log_{(-5)} 125 = z$.

Por definición:

$$\log_{(-5)} 125 = z \leftrightarrow (-5)^z = 125$$

Entonces:

$$(-5)^z = 125$$
$$(-5)^z = 5^3$$

Por lo tanto, no existe **z** tal que $(-5)^z = 125$.

En general, se exige que la base del logaritmo sea positiva.

Respecto a su argumento

Sea $\log_7 a = c$.

Por definición:

$$\log_7 a = c \leftrightarrow 7^c = a$$

Se sabe que, para todo número real **c**:

$$7^c > 0$$

Por lo tanto, necesariamente debe ser $a > 0$.

En general, se exige que el argumento del logaritmo sea mayor que 0.

En síntesis

- Se define **logaritmo** como el exponente de una potencia.

$$\log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$
$$\text{con } a > 0,\ b \neq 1,\ b > 0$$

- La expresión anterior se lee "**c** es el logaritmo en base **b** de **a**".

Practica

Calcula el valor de los logaritmos aplicando la definición.

1. $\log_4 16$

2. $\log_3 \frac{1}{9}$

3. $\log_{27} 81$

4. $\log_7 \frac{1}{7}$

5. $\log_{\frac{1}{3}} 81$

6. $\log_{0,01} 0,0001$

Escribe como logaritmos las siguientes expresiones.

7. $8^2 = 64$

8. $3^5 = 243$

9. $2^{10} = 1.024$

10. $5^{-1} = \frac{1}{5}$

11. $5^0 = 1$

12. $3^{-2} = \frac{1}{9}$

13. $\sqrt{49} = 7$

14. $27^{\frac{2}{3}} = 9$

15. $\sqrt{3a} = b$

Calcula el valor de las siguientes expresiones.

16. $\log_{10} 100 + \log_4 1 - \log_3 27$

17. $\log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

18. $\log_{100} 0,001 + \log_{\sqrt{2}} 8$

Calcula las bases de los siguientes logaritmos.

19. $\log_b 1.000 = 3$

20. $\log_b 49 = 2$

21. $\log_b 27 = \frac{3}{4}$

22. $\log_b 9 = \frac{1}{2}$